Л1. Множество вещественных чисел. Декартовы прямоугольные координаты на прямой, плоскости и в пространстве. Полярные координаты. Комплексные числа. Формы представления комплексные числа.

Цель лекции: познакомить студентов с основными числовыми множествами, логической символикой, свойствами интервалов и отрезков, основами декартовой и полярной систем координат, а также с понятиями комплексных чисел и формами их представления. Сформировать базовое понимание координатных систем и числовых структур, необходимых для дальнейшего изучения математического анализа.

Основные вопросы

- Понятие множества и его элементы. Способы задания множеств.
- Основные числовые множества: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- Символика математической логики: кванторы, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание.
- Интервалы, отрезки, полуинтервалы, ограниченные и неограниченные множества.
- Декартова прямоугольная система координат на прямой, плоскости и в пространстве.
- Полярная система координат, связь с декартовыми координатами.
- Комплексные числа: определение, вещественная и мнимая части.
- Формы записи комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная (Эйлера)

Краткое содержание: В лекции рассматриваются основные числовые множества, элементы математической логики, понятия интервалов и ограниченности множеств, а также вводятся декартова и полярная системы координат. Даются определения комплексных чисел и основных форм их представления.

1. **Множества.**

Определение. Множеством называется совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть ***элементами*** множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству А); в противном случае пишут $a \notin A$ (или $a \overline{\in} A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества *B*, в этом случае множество A называется ***подмножеством*** множества B. Множества A и B называются ***равными*** ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$, другими словами, множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Существуют два основных способа задания (описания) множеств.

а) множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ т.е. записывается в виде:

$$\boldsymbol{A = \{a_1, a_2, .., a_n\}}$$

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества Т, которые обладают общим свойством α. В этом случае используется обозначение:

$$\boldsymbol{A = \{x \in T : \alpha(x)\}}.$$

Множества, элементы которых являются числами, называются числовыми. Приведём основные примеры числовых множеств.

Множество натуральных чисел обозначается через N, $N = \{1,2,3,...\}$.

Во множестве N действуют операции сложения и умножения.

Множество целых чисел обозначается через *Z:*

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Во множестве Z действуют операции сложения, вычитания и умножения.
Множество рациональных чисел обозначается через Q,

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}.$$

В множестве Q действуют все четыре арифметические операции. Множество всех действительных чисел – как рациональных, так и иррациональных, обозначается через R. В нём выполняются все арифметические действия и извлекаются корни любой степени из неотрицательных чисел.

Эти множества являются подмножествами друг друга в следующем порядке:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

2. Символика математической логики. Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые основные *логические символы*, или *кванторы*. Пусть α и β некоторые предложения.

1) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: “из α следует β”, "$\Rightarrow$" символ импликации.

2) Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает “α и β эквивалентны”, т.е. что, из $\alpha \Rightarrow \beta$ и из $\beta \Rightarrow \alpha$. "$\Leftrightarrow$"– символ эквивалентности.

Любую теорему в математике можно записать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$ или в виде $\alpha \Leftrightarrow \beta$, α– условия теоремы, а β – её утверждение.

3) Знак “∀” означает: “каждый, любой, для каждого” и т. д. ∀– квантор общности. Например, $\forall x \in X \ \ \alpha(x)$ означает: “для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$”.

4) Знак “∃” означает “существует, найдется, имеется”. "∃"– квантор существования. ∃ - перевернутая Е - начальная буква слова “Existenz” - “существует”. Например, $\exists x \in X \ \ \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. Если элемент x из X, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут: $\exists x \in X \ \ \alpha(x)$.

5) Знак “:” означает: “такой, что” или “такие, что”, специального названия он не имеет.

6) Знак “ $\neg$ ” или $\overline{\alpha}$ означает отрицание утверждения α, "$\neg$" - символ отрицания. Часто при доказательстве теорем используется метод "от противного", который использует равносильность предложений ($\alpha \Rightarrow \beta$) и ($\beta \Rightarrow \alpha$).

7) Запись $\alpha \wedge \beta$ означает "α и β" ("$\wedge$" – символ конъюнкции).

8) Запись $\alpha \vee \beta$ означает "α или β" ("$\vee$" – символ дизъюнкции).

3. Отрезок, интервал, ограниченное множество. Введём следующие обозначения для подмножеств в R.

Множество чисел x $\in$ R, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, называется ***отрезком*** (с концами a,b) или сегментом и обозначается так:

$[a,b]$, т.е. $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется ***интервалом*** (с концами a,b) или открытом отрезком и обозначается так: (a, b*)*, т. е. (a, b) = { $x \in R$: $a < x < b$ }.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам а $a \le x < b$ или $a < x \le b$

, обозначаются соответственно $[a,b),(a,b]$ и называются полуоткрытыми отрезками или ***полуинтервалами.*** Первый, например, закрыт слева и открыт справа.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются ***числовыми промежутками*** *или просто* ***промежутками****.*

Произвольный интервал (a, b), содержащий точку x_0 мы будем называть *окрестностью точки* x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ называют ε - *окрестностью* точки $x_0: U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Часто рассматривают множества, называемые бесконечными интервалами или полуинтервалами:

1) $(-\infty,+\infty)$, 2) $(-\infty,a]$, 3) $(-\infty,a)$, 4) $(a,+\infty)$, 5) $[a,+\infty)$.

Первые их них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая), остальные состоят их всех чисел, для которых соответственно:

2) $x\le a$, 3) $x<a$, 4) $a<x$, 5) $a\le x$.

Если a и b конечны и $a<b$, то число $b-a$ называется ***длиной*** сегмента $[a,b]$ или интервала (a,b), или полуинтервала $(a,b],[a,b)$.

Пусть X есть произвольное множество действительных чисел.

Говорят, что множество X ***ограничено сверху,*** если $\exists$ (действительное), число M такое, что $\forall x\in X: x\le M$.

Ограничено снизу, если $\exists$ число *m* такое, что $\forall x\in X: x\ge m$.

Ограничено, если оно ограничено как сверху, так и снизу. В противном случае, оно называется ***неограниченным.***

Ясно, что множество X ограничено, если $\exists M>0:\forall x\in X\Rightarrow |x|\le M$, так как $(|x|\le M)\Leftrightarrow(-M\le x\le M)$.

Неограниченное множество X можно определить так: множество X неограниченно $\Leftrightarrow \forall M>0, \exists x_0\in X: |x_0|>M$.

Пример. $[a,b]$– ограниченное множество (a,b) – ограничено, если a и b конечны, и не ограничено, если $(-\infty\le a),(b\le\infty)$.

Декартова система координат.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка называется началом координат, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат.

Базис называется ортонормированным если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Декартова система координат, базис которого ортонормирован, называется декартовой прямоугольной системой координат.

Полярная система координат.

Полярная система координат определяется точкой O, называемой **полюсом**, и исходящей из полюса лучом, который называется **полярной осью**.

Положение точки фиксируется его радиус-вектором и углом между полярной осью и радиус-вектором. Полученный угол называется **полярным углом**.

Декартовы координаты точки выражаются через полярные координаты так:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Комплексные числа. Формы представления комплексные числа.

Определение комплексного числа:

Комплексное число имеет вид: $z = x + iy$,
где:
x — вещественная часть,
y — мнимая часть,
i — мнимая единица, такая что $i^2 = -1$.

Обозначим действительную и мнимую части комплексного числа следующим образом:

$$Re\, z = x, \;\; Im\, z = y$$

Формы представления комплексных чисел

1. Алгебраическая форма

$$z = x + iy$$

2. Тригонометрическая форма

Любое ненулевое комплексное число можно записать через **модуль** и **аргумент**:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль числа,
- $\varphi = \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ - аргумент числа.

3. Показательная форма (экспоненциальная форма, форма Эйлера)

Используя формулу Эйлера:

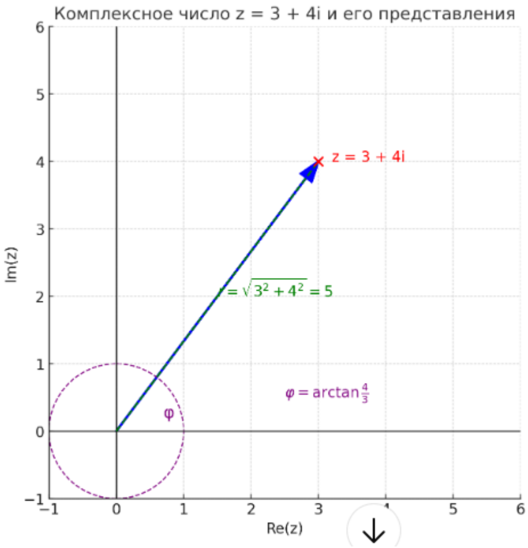
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

мы получаем:

$$z = re^{i\varphi}.$$

- **Алгебраическая форма** — удобна для сложения и вычитания.
- **Тригонометрическая и показательная формы** — удобны для умножения, деления и возведения в степень.

Комплексное Число Z = 3 + 4i И Его Представления



Вопросы для самоконтроля

1. Что такое множество? Какие способы задания множеств существуют?
2. Перечислите основные числовые множества и их взаимосвязь.
3. Как интерпретируется запись $x \in A$ и $A \subset B$?
4. Что называют интервалом, отрезком и полуинтервалом?
5. Что означает ограниченность множества сверху и снизу?
6. Что такое декартова система координат?
7. Как выражаются декартовы координаты через полярные?
8. Дайте определение комплексного числа.
9. Назовите три формы представления комплексного числа.
10. В каких задачах удобнее использовать тригонометрическую и показательную формы?

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Серия: Учебники для вузов. Специальная литература, 2-е издание, стереотипное, Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2009, 512 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2004.